Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους:

1. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(-2,5)$ και είναι συνεχής στο $x_o = -2$ τότε $\lim_{x\to -2} f(x) = -2$.

2. Αν το $\lim_{x\to x_o} f(x)$ υπάρχει, αλλά $\lim_{x\to x_o} f(x) \neq f(x_o)$ τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

3. Για κάθε $x_o \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to x_o} \eta\mu x = \eta\mu x_o$.

4. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_o όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = l_1$ και $\lim_{x\to x_o} g(x) = l_2$ όπου l_1 και l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε :
$$\lim_{x\to x_o}(f^{\upsilon}(x) + g^{\upsilon}(x)) = (l_1)^{\upsilon} + (l_2)^{\upsilon}.$$

5. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_o} g(x) = 3$, τότε το $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$.

6. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_o όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = l_1$ και $\lim_{x\to x_o} g(x) = l_2$ όπου l_1 και l_2 πραγματικοί αριθμοί, και $l_2 \neq 0$ τότε: $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

7. Αν $\lim_{x\to 2} f(x) = -1$, τότε $\lim_{x\to 2} f^{10}(x) = +1$.

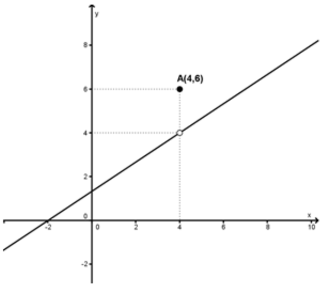
8. Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = l > 0$, τότε $\lim_{x\to x_o} \sqrt[\upsilon]{f(x)} = \sqrt[\upsilon]{l}$

9. Μια συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$. Αν η f είναι συνεχής στο $x = 1$, τότε $f(1) = 3$.

10. Αν $f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 2}$ τότε το $\lim_{x\to 2} f(x) = -2$.

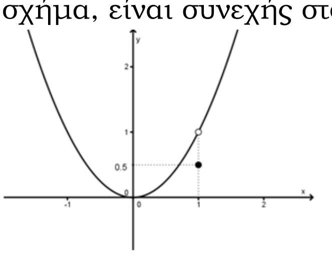
11. Θεωρούμε συνάρτηση f που ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν για $x \neq 1$ η f δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, τότε $f(1) = 3$.

12. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Τότε $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 6$.



13. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, x > 1$ είναι συνεχής.

14. Η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι συνεχής στο $x = 1$.



15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2}$, με $x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$. Τότε $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

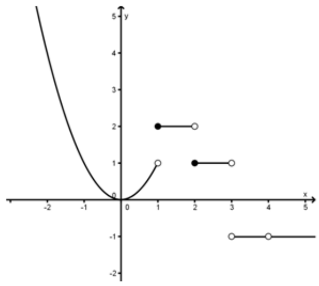
Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής (Επιλογή μιας απάντησης)

1. Για τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος ισχύει:

   (i) $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$

   (ii) $f(1) = 1$

   (iii) είναι συνεχής στο $x = 0$.



2. Αν $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}, x \neq 2$, τότε:

   (i) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

   (ii) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

   (iii) $\lim_{x\to 2} f(x) = -2$

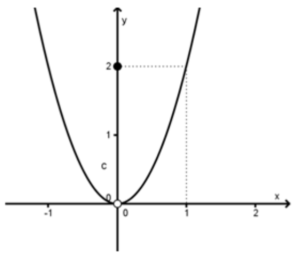
3. Για τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος επιλέξτε τη **λάθος** απάντηση:

   (i) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

   (ii) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

   (iii) η f είναι συνεχής στο $x = 0$

   (iv) $f(0) = 2$



4. Αν $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}, x \in [-1, 3) \cup (3, +\infty)$ τότε:

   (i) $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$

   (ii) $\lim_{x\to 3} f(x) = \dfrac{1}{4}$

   (iii) $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

5. Αν $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$, τότε το $\lim_{x\to -1}\left(x \cdot f^2(x) - \sqrt{x+5} + \dfrac{x+1}{f(x)}\right)$ ισούται με:

   (i) 6

   (ii) 0

   (iii) -6

   (iv) 4

Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ και $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$, να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))$	α) $\frac{3}{4}$
2) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$	β) 12
3) $\lim_{x\to 1}\sqrt{f(x)}$	γ) $\frac{4}{3}$
4) $\lim_{x\to 1}(4\cdot f(x))$	δ) 7
5) $\lim_{x\to 1} g^2(x)$	ε) 16
6) $\lim_{x\to 1}(f(x)+g(x))$	στ) 9
	ζ) 2

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\lim_{x\to 0} e^x$	α) 0
2) $\lim_{x\to 1} \ln x$	β) -1
3) $\lim_{x\to 1} e^x$	γ) 1
4) $\lim_{x\to e} \ln\frac{1}{x}$	δ) e

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x$	α) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2) $\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \varepsilon\varphi x$	β) 0
3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \eta\mu x$	γ) $-\frac{1}{2}$
4) $\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu x$	δ) -1

4. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$	α) 4
2) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$	β) 2
3) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{2x^2+x}$	γ) 3

5. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με το αντίστοιχό της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $f(x)=\frac{x^4-1}{x-1}$	α) είναι συνεχής στο $x=1$
2) $g(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ,x\in(0,1)\cup(1,+\infty)\\ 1 & ,x=1\end{cases}$	β) η τιμή της για $x=1$ είναι ίση με 1
3) $h(x)=x+1$	γ) δεν ορίζεται στο $x=1$

Ερωτήσεις Θεωρίας-Θέμα Α

1. Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των ορίων;
2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής στο $x_o\in A$;
3. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής στο A;
4. Ποιες είναι οι βασικές συνεχείς συναρτήσεις;

Ασκήσεις-Θέμα Β

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

   (i) $\lim_{x\to -2}(x^5 - x^4 - 4x^3 - 2x + 1)$

   (ii) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

   (iii) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

   (iv) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}(2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu^2 x + \varepsilon\varphi x)$

   (v) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$

   (vi) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - 2}{\eta\mu x - 1}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

   (i) $\lim_{x\to 0}(x^9 - 11)\cdot(x - 1)^{10}$

   (ii) $\lim_{x\to -1}(5x^8 - 6x^7 + 4x^3 - x + 2)$

   (iii) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3} + 1}{\sqrt{x+1}}$

   (iv) $\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{3x^3 + 2x - 1} + 5x - 2\right)$

   (v) $\lim_{h\to 1}\dfrac{7h^2 - 2h + 1}{3h\cdot(h-1)^2 + 2h}$

   (vi) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x^3 + 7}$

   (vii) $\lim_{x\to 0}(\eta\mu^3 x - 5\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\cdot\varepsilon\varphi x)$

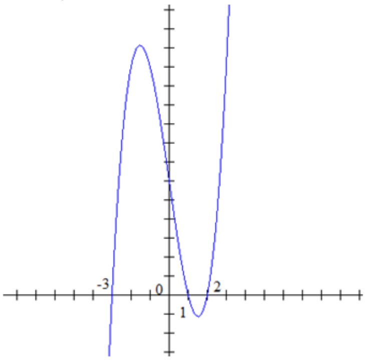
   (viii) $\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}(2\cdot\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi x - 2\sigma\varphi x)$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

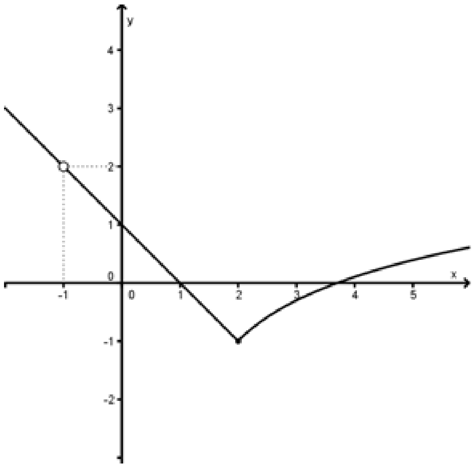
   (i) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$

   (ii) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^3 - 5x - 6}{2x - 4}$

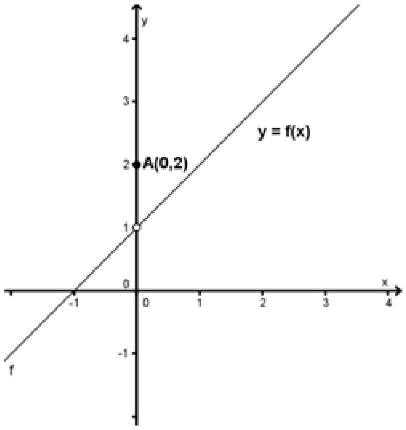
4. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος, να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 2$.



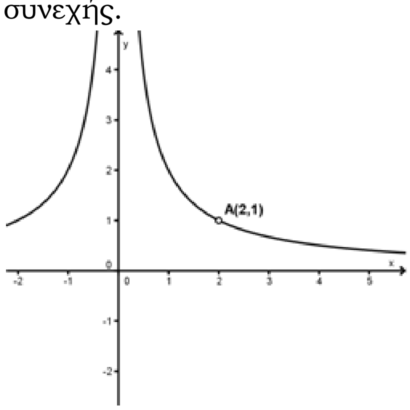
5. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι συνεχής.



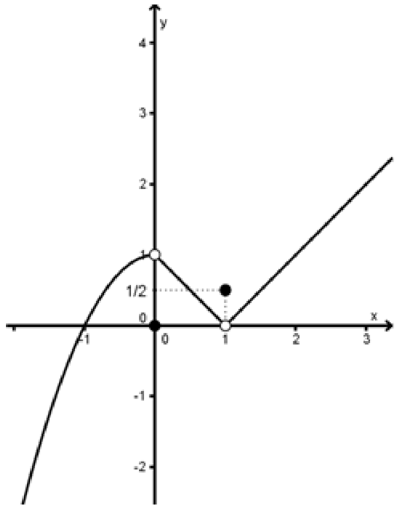
6. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων στην οποία η f είναι συνεχής.



7. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων στην οποία η f είναι συνεχής.



8. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων στην οποία η f είναι συνεχής.



9. Να βρείτε το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων όπου η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & , x \neq 2 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$ είναι συνεχής.

10. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & , x \neq 1 \\ -3 & , x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x = 1$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & , x \neq \lambda \\ 2 & , x = \lambda \end{cases}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x = \lambda$.

Ασκήσεις-Θέμα Γ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

   (i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+8}-3}$

   (ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}-\dfrac{6x+4}{x^2-4}\right)$

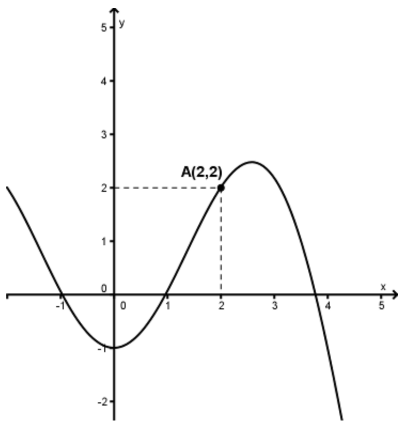
2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x^2$.Να βρείτε το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

.

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{2x+5}+1}{f(x)-1}-x^2\right]=\lambda.$$



4. Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

5. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής στο $x=1$ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-2} & ,x\in[0,1)\cup(1,+\infty) \\ \lambda & ,x=1\end{cases}$.

6. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής στο -1 η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+\alpha x+2}{x+1} & ,x\neq -1 \\ \beta & ,x=-1\end{cases}$.

7. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x=1$ και $f(1)=2$. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-2)^2\cdot f(x)+lnx\cdot(\sqrt{x}-4)\right].$$

8. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 2$ και το $A(2, 1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x\cdot f(x)+x^2-2f(x)-4}{x-2}=5.$$

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{4\cdot \eta\mu^2 x+4\cdot \eta\mu x-3}{2\cdot \eta\mu x-1}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\eta\mu x\cdot \varepsilon\varphi x+2\cdot \varepsilon\varphi x-\eta\mu x-2}{1-\varepsilon\varphi x}$

10. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{\sqrt{10+3x}+x}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x}-1}$

(iv) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^3-1}{\sqrt{h^2+2h+4}-2}$

11. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3-2x}{x^2-1}+\frac{2x^2-3x-6}{x^2-1}\right)$

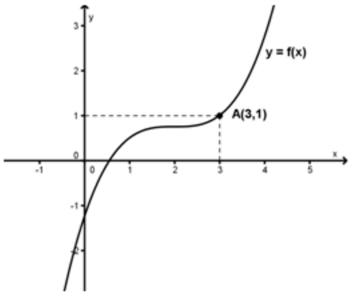
(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+5x^2+x-5}{x^2+x}+\frac{5}{x}\right)$

12. (i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$ με $x \geq -1$. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

(iii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$, με $x \neq 0$. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

13. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to 3}[f(x) - \lambda x + x^2] = 1$



14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3} & , x \neq 3 \\ \lambda & , x = 3 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x = 3$.

15. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+3x^2-x+2}{x^2-4} & , x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +2) \\ \lambda & , x = -2 \end{cases} \quad , \text{με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x = -2$.

16. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2a}{\sqrt{x}-1} & , x \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \\ \lambda & , x = 1 \end{cases} \quad , \text{με } a,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές των a και λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x = 1$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+a}{x-\lambda} & , x \neq \lambda \\ 1 & , x = \lambda \end{cases}$ με $a, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των a και λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x = \lambda$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x = 5$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(5, -1)$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$ με $g(x) = 5 \cdot f^2(x) + 2 \cdot f(x) + 3x - 2$.

19. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x = 1$ και

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 \cdot f(x) - f(x) - 2x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3} = 2,$$

να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 7)$.