ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ

ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Μυτιλήνη 28/5/13

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων Α(x_1 , y_1) και Β(x_2 , y_2) είναι ίση με

$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (μονάδες 9)

Α2. Έστω δύο σταθερά σημεία Ε , Ε΄ του επιπέδου.

i. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε , Ε΄
(μονάδες 3)

ii. Να δώσετε τον ορισμό της υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε , Ε΄
(μονάδες 3)

Α3. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν Σ αν είναι σωστές ή σαν Λ αν είναι λάθος

i. Η παραβολή με εξίσωση C: $y^2=2px$ έχει διευθετούσα την $x=-\frac{p}{2}$

ii. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ διανύσματα τότε $|\vec{\alpha}.\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|.|\vec{\beta}|$

iii. Όποια ευθεία διέρχεται από το Α(x_o , y_o) έχει εξίσωση της μορφής $y-y_o=\lambda(x-x_o)$

iv. Κάθε υπερβολή με α = β λέγεται ισοσκελής και έχει εξίσωση $x^2-y^2=\alpha^2$

v. Η εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$ με $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ παριστάνει έλλειψη με εστίες τις Ε(γ,0) και Ε΄(-γ,0)

(μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2\,,|\vec{\beta}|=1\;\;\kappa\alpha\iota\;\;\left(\widehat{\vec{\alpha}\,,\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$

Να υπολογίσετε :

Β1. Το $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$ (μονάδες 5)

Β2. Το $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|$ (μονάδες 5)

Β3. Το $2\vec{\alpha}.(2\vec{\beta}+\vec{\alpha})$ (μονάδες 5)

B4. Τη γωνία των διανυσμάτων $2\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$. (μονάδες 5)

B5. Αν επιπλέον για κάποιο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}.\vec{\gamma}$ (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(4,-3) και εμβαδόν Ε=25 cm^2. Αν οι κορυφές Β, Γ βρίσκονται πάνω στην ευθεία (ε): 4y=3x+1 έτσι ώστε το τμήμα ΒΓ να έχει μέσον Μ(5,4), να δείξετε ότι:

Γ1. Η διάμεσος ΑΜ έχει μήκος (ΑΜ)= $\sqrt{50}$ cm. (μονάδες 5)

Γ2. Το ύψος $υ_α$ του τριγώνου , έχει μήκος ($υ_α$)=5cm. (μονάδες 5)

Γ3. Η πλευρά ΒΓ έχει μήκος (ΒΓ)=10cm (μονάδες 5)

Γ4. Αν $x_B<x_Γ$ οι συντεταγμένες των Β,Γ είναι (1,1) και (9,7) αντίστοιχα. (μονάδες 5)

Γ5. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση C: $x^2+y^2+2λ^2(1-x)=1+4λy$ (1), λ∈R.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (μονάδες 5)

Δ2. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα r των παραπάνω κύκλων. (μονάδες 5)

Δ3. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων κινούνται σε παραβολή η οποία έχει Εστία Ε(1,0) και διευθετούσα (δ): x=-1. (μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από την εστία Ε της παραπάνω παραβολής (μονάδες 5)

Δ5. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται της διευθετούσας της παραβολής για κάθε λ ∈ R. (μονάδες 5)

Απαντήστε σε όλα τα θέματα.

Κάθε επιτυχία!

Η ΔΝΤΡΙΑ | Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΣΚΑΛΟΧΩΡΙΤΟΥ Γ. | ΚΟΥΤΣΚΟΥΔΗΣ Π.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ 34-35

Α2. i. Σχολικό σελ 100
ii. Σχολικό σελ 113

Α3. i. Σ

ii. Λ (ισχύει $|\vec{\alpha}.\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|.|\vec{\beta}|$)

iii. Λ (υπάρχει και η $x=x_o$, που δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης)

iv. Σ

v. Λ (οι εστίες είναι Ε(0,γ) και Ε΄(0, -γ))

ΘΕΜΑ Β

Β1. i. $\vec{\alpha}.\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 2.1.(-\frac{1}{2}) = -1$

ii. $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 4-4+4=4$

άρα $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=2$

iii. $2\vec{\alpha}.(2\vec{\beta}+\vec{\alpha}) = 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}^2 = -4+8=4$

iv. $\sigma\upsilon\nu\left(2\vec{\alpha},2\vec{\beta}+\vec{\alpha}\right) = \dfrac{2\vec{\alpha}.(2\vec{\beta}+\vec{\alpha})}{|2\vec{\alpha}||2\vec{\beta}+\vec{\alpha}|} = \dfrac{4}{4.2} = \dfrac{1}{2}$ άρα $\left(2\vec{\alpha},2\vec{\beta}+\vec{\alpha}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

v. $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow$
$4 + 2 + \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma} = -6$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(\mathrm{AM}) = \sqrt{(5-4)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{50}$ cm

Γ2. $\upsilon_\alpha = d(A,\varepsilon) = \dfrac{|3.4-4.(-3)+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{|25|}{5} = 5cm$

Γ3. $\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}.\upsilon_\alpha}{2} \Rightarrow 25cm^2 = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}.5}{2} \Rightarrow \mathrm{B\Gamma} = 10cm$

Γ4. Αφού ΒΓ έχει μέσον Μ(5,4) τότε ΒΜ=ΓΜ=5cm . Έστω (κ,λ) οι συντεταγμένες μιας εκ των κορυφών Β,Γ. Όμως τα Β, Γ ανήκουν στην ευθεία (ε) άρα 4λ=3κ+1.

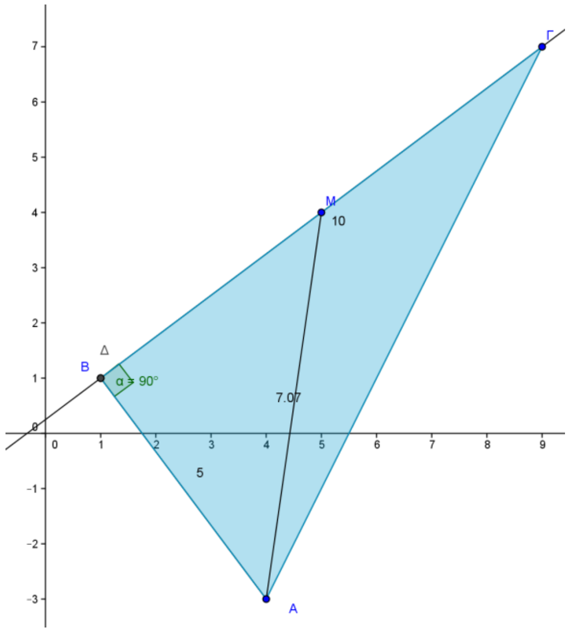
Έχω ΒΜ=5 $\Longrightarrow$ $BM^2=25 \Longrightarrow (5-\kappa)^2+(4-\lambda)^2=25 \Longrightarrow (5-\kappa)^2+(4-\frac{3k+1}{4})^2=25 \Longrightarrow$

$(5-\kappa)^2+(\frac{15-3k}{4})^2=25 \Longrightarrow (5-\kappa)^2+\frac{9(5-k)^2}{16}=25 \Longrightarrow$

$\frac{25}{16}(5-k)^2=25 \Rightarrow (5-k)^2=16 \Rightarrow 5-k=\pm 4 \Rightarrow k=1 \text{ ή } k=9$. για κ=1 έχω λ=1 και για κ=9 έχω λ=7. Άρα Β(1,1) και Γ(9, 7).

Γ5. $\overrightarrow{AB}=(1-4,1+3)=(-3,4)$ $\overrightarrow{B\Gamma}=(9-1,7-1)=(8,6)$
άρα $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B\Gamma}=(-3,4)(8,6)=-24+24=0$ άρα $\hat{B}=90°$

Ή με Πυθαγόρειο Θεώρημα…



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η (1) γράφεται $x^2+y^2-2\lambda^2x-4\lambda y+2\lambda^2-1=0$. Έχουμε $A=-2\lambda^2$, $B=-4\lambda$ και $\Gamma=2\lambda^2-1$.
Επειδή $A^2+B^2-4\Gamma=4\lambda^4+16\lambda^2-8\lambda^2+4=4(\lambda^4+2\lambda^2+1)=4(\lambda^2+1)^2>0$ η (1) παριστάνει κύκλο για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λ.

Δ2. Τα κέντρα των κύκλων είναι $K(\lambda^2, 2\lambda)$ και η ακτίνα τους $r=\frac{\sqrt{4(\lambda^2+1)^2}}{2}=\lambda^2+1$

Δ3. Αν Κ(x,y) τότε $x=\lambda^2$ και $y=2\lambda$ άρα $y^2=4x$ άρα τα Κ κινούνται σε παραβολή με

p=2 , που έχει εστία την Ε(1,0) και διευθετούσα δ: x= - 1

Δ4. Οι συντεταγμένες του Ε(1,0) επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda \in R$ αφού η $x^2+y^2+2\lambda^2(1-x)=1+4\lambda y$ για x=1 και y=0 γίνεται 0λ=0 που ισχύει για κάθε $\lambda \in R$.

Δ5. Αφού το Κ ανήκει στην παραβολή, η απόστασή του από την (δ) ισούται με την απόστασή του από το Ε, που λόγω του Δ4 είναι η ακτίνα r του κύκλου. Άρα ο κύκλος εφάπτεται της διευθετούσας.
(ή πάρτε απόσταση του Κ από την δ και δείξτε ότι ισούται με R.)